EXERCICE 1. **Exercice 94 page 145**

EXERCICE 2. **Exercice 126 page 152**

EXERCICE 3. L'objectif est de définir une suite permettant le calcul approché de racines carrées par des opérations simples (divisions, sommes, produits) sur les nombres rationnels.

Soit $a \in [1;+\infty[$ et f la fonction $f :]0;+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x}+x\right)$.

On définit la suite (u_n) par $u_0 \in \left[\sqrt{a};a\right]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

① Dresser le tableau de variations de la fonction f.

② Calculer $f(\sqrt{a})$ et $f(a)$ et les faire apparaître dans le tableau précédent.
En déduire : pour $x \in [\sqrt{a};a]$, $f(x) \in [\sqrt{a};a]$.

③ Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n \in [\sqrt{a};a]$.
(on a notamment démontré que $u_n \neq 0$, donc que la suite est bien définie)

④ Démontrer que la suite (u_n) est décroissante, puis convergente vers une limite ℓ.

⑤ Démontrer que ℓ vérifie $\ell = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{\ell}+\ell\right)$. En déduire ℓ.

⑥ Dans cette question (seulement), $a = 2$ et $u_0 = 2$. Exprimer u_3 sous forme d'une fraction. À combien de décimales u_3 approche-t-elle $\sqrt{2}$?

⑦ +💣 dans cette question on s'intéresse à la vitesse de convergence de la suite (u_n).
On introduit, pour $n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - \sqrt{a}$ qui mesure l'écart entre u_n et $\sqrt{a}$.
On suppose que u_0 approche $\sqrt{a}$ par excès à 0,5 près : $0 \leq v_0 \leq 0{,}5$.

(a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \dfrac{v_n^2}{2u_n}$. En déduire : $v_{n+1} \leq v_n^2$.

(b) Par récurrence, prouver que pour tout $n \in \mathbb{N},\ 0 \leq v_n < \dfrac{1}{2^{2^n}}$

(c) En déduire $v_4 < 10^{-4}$. À partir de quel rang n, le terme u_n approche-t-il $\sqrt{a}$ avec une précision de 1 000 décimales ?